

Cours ETT

Mécanique des milieux déformables

(Utilisation d'adobe Reader pour voir les animations)

1. Programme ETT

2.3.3 Comportement mécanique des systèmes :

Résistance des matériaux : hypothèses et modèle poutre, types de sollicitations simples, notion de contrainte et de déformation, loi de Hooke et module d'Young, limite plastique, étude d'une sollicitation simple.

2. Introductions

Jusqu'à maintenant les systèmes que nous avons étudiés étaient des systèmes parfaits, donc indéformables. Malheureusement dans la réalité ils sont toujours déformables plus ou moins en fonction de leurs caractéristiques et des efforts exercés dessus.

Dans certains cas, nous allons utiliser ses caractéristiques de déformations pour améliorer la vie de tous les jours.

Exemple : suppression de vibrations (support moteur)



3. Présentation

La résistance des matériaux, aussi appelée RDM, est une discipline particulière de la mécanique des milieux continus permettant le calcul des contraintes et déformations dans les structures des différents matériaux (machines, génie mécanique, bâtiment et génie civil).

La RDM permet de ramener l'étude du comportement global d'une structure (relation entre sollicitations, forces ou moments, et déplacements) à celle du comportement local des matériaux la composant (relation entre contraintes et déformations).

L'objectif est de concevoir la structure suivant des critères de résistance, de déformation admissible et de coût financier acceptable.

L'étude de la résistance des matériaux existe depuis Galilée (17^{ème} siècle).

Il a étudié la résistance des matériaux et le mouvement des corps. Il s'est intéressé à la résistance d'une poutre encastrée soumise à l'action d'un poids situé à son extrémité. Cette approche va permettre de changer la manière d'aborder les problèmes de résistance des structures. Malheureusement Galilée a commis une erreur car il a admis que la contrainte de traction dans toute la hauteur de la section d'encastrement est uniforme.

4. Hypothèses de la résistance des matériaux

Dans la suite du cours, on fait appel aux hypothèses suivantes :

Le matériau est :

- **élastique** (le matériau reprend sa forme initiale après un cycle chargement déchargement),
- **linéaire** (les déformations sont proportionnelles aux contraintes),
- **homogène** (le matériau est de même nature dans toute sa masse),
- **isotrope** (les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions).

Le problème est :

- en **petits déplacements** (les déformations de la structure résultant de son chargement sont négligeables et n'affectent pratiquement pas sa géométrie),
- **quasi-statique** (pas d'effet dynamique),
- **quasi-isotherme** (pas de changement de température).

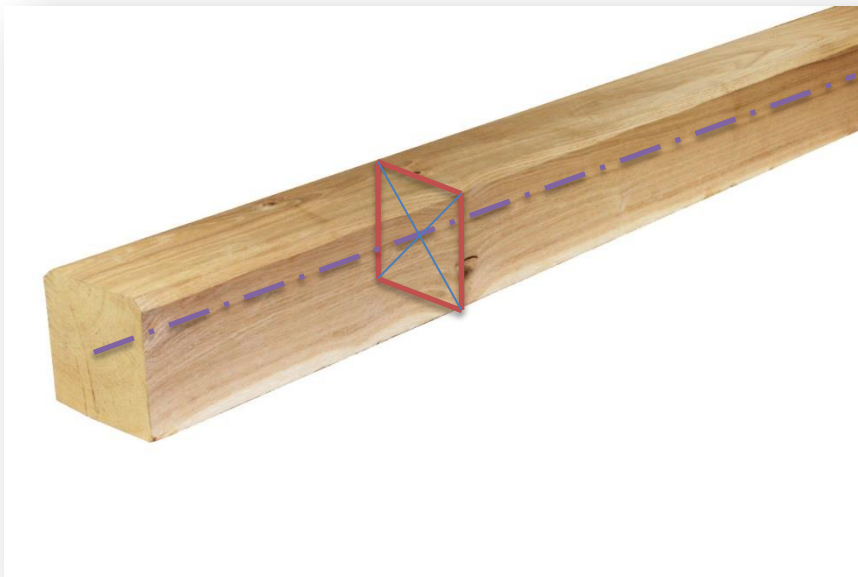
Ces simplifications permettent de faire des calculs simples et rapides, mais elles peuvent être parfois inadaptées (matériaux composites, le bois, le béton armé, polymères (déformation importante)).

5. Principes fondamentaux de la théorie des poutres

On peut utiliser ce principe lorsque deux des dimensions de la poutre sont petites par rapport à la troisième. En d'autres termes les dimensions de la section droite sont petites par rapport à la longueur de la poutre.



Il permet d'approximer la poutre par une ligne (droite ou courbe) et des sections droites.



En général, une longueur ou une distance de l'ordre de deux à trois fois la plus grande dimension de la section droite est considérée suffisante pour appliquer le modèle RDM.

Le principe de Saint-Venant précise que le comportement en un point quelconque de la poutre, pourvu que ce point soit suffisamment éloigné des zones d'applications des forces et des liaisons, est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces et de la façon dont sont physiquement réalisées les liaisons; le comportement dépend alors uniquement du torseur des forces internes en ce point.

La conséquence est que les contraintes produites par un système de forces dans une section éloignée du point d'application de ces forces ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultat du système de forces appliquées à gauche de cette section.

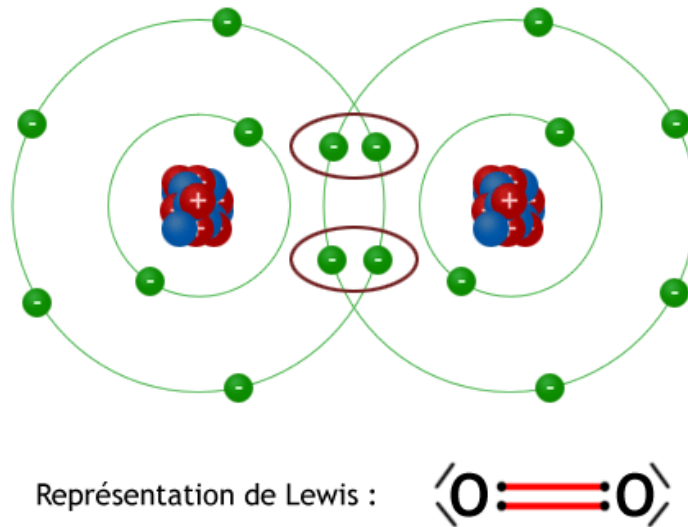
Remarque :

Le modèle RDM n'est plus valide lorsque le principe de Saint Venant n'est pas satisfait, c'est-à-dire à proximité des liaisons, des appuis ou des points d'application des forces. Dans ces cas particuliers, il faut appliquer les principes de la mécanique des milieux continus.

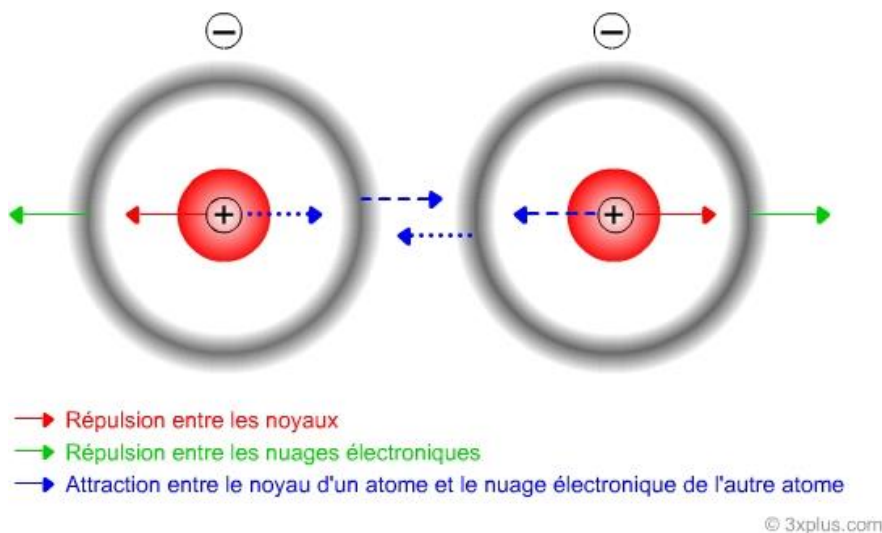
6. Etude mécanique d'une poutre.

a. Préambule

Tous les matériaux sont composés d'atomes. Les liaisons entre ceux-ci sont essentiellement électrostatiques.



Toute force appliquée à un matériau se traduit par une déformation qui entraîne un changement de position des atomes. Les arrangements se trouvent en équilibre lorsque les noyaux atomiques sont distants d'une certaine valeur r_0 . Sous l'effet d'efforts extérieurs, les atomes se rapprochent ou s'éloignent engendrant une force d'attraction ou répulsion.

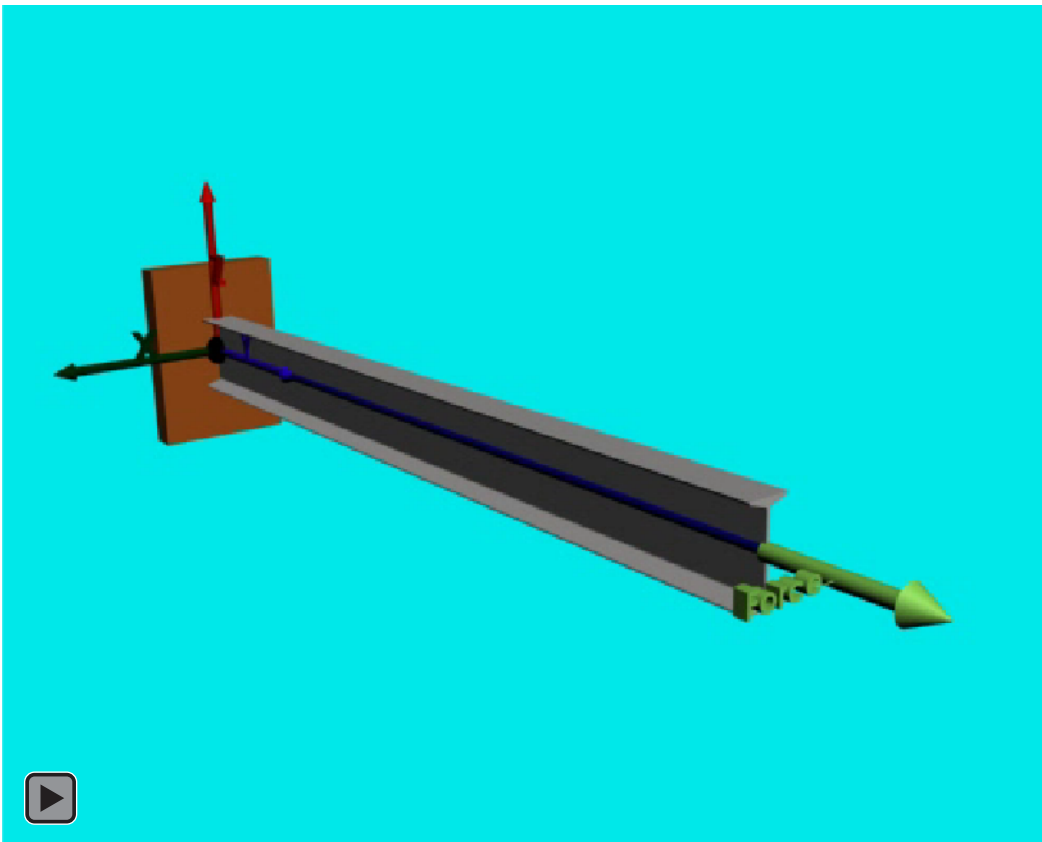


Au voisinage de r_0 , la force F est pratiquement proportionnelle à la distance « $r-r_0$ » pour tous les matériaux. Ce qui veut dire que la liaison entre atomes peut être visualisée comme un ressort de raideur S . On peut donc estimer le module d'élasticité E en fonction de S et de r_0 par un calcul élémentaire :

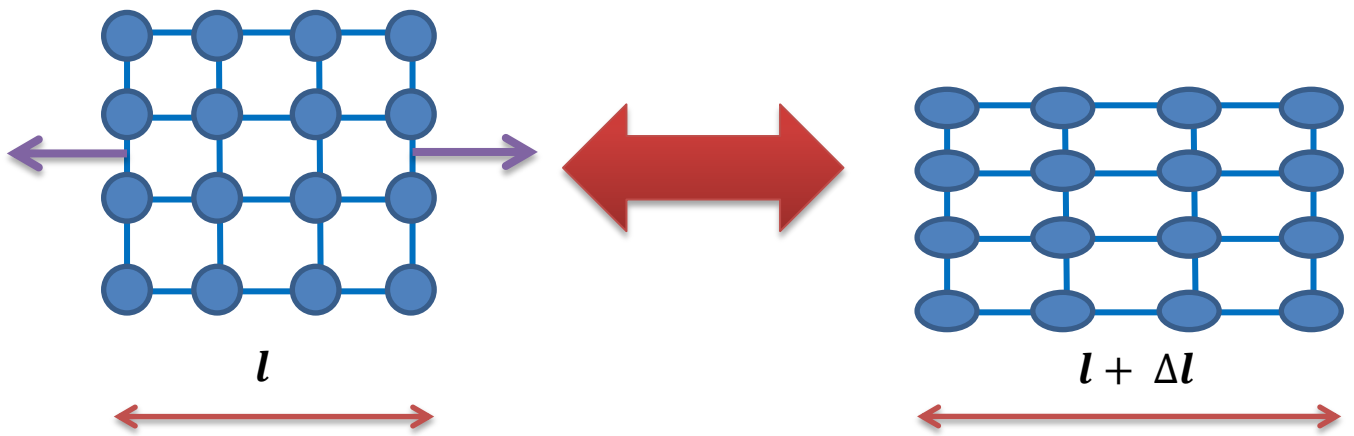
$$E \approx \frac{S}{r_0}$$

b. Sollicitations simples

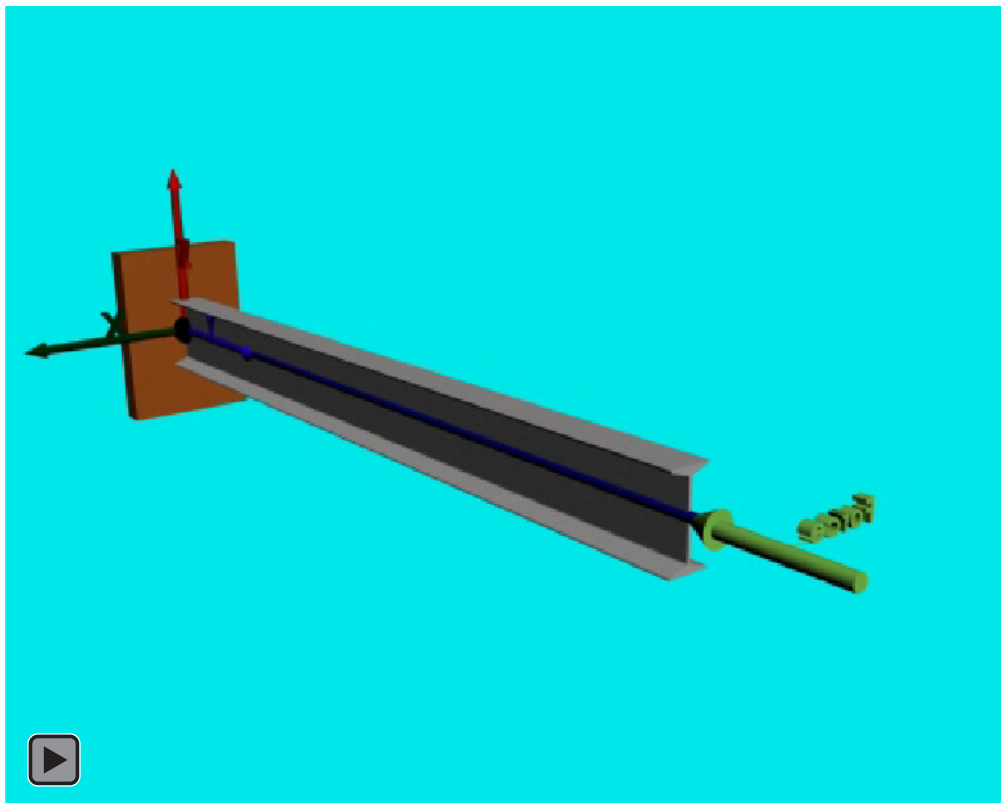
- Traction



Si on considère un arrangement atomique régulier sollicité suivant un de ces axes principaux, on fait apparaître une sollicitation appelé traction. Dans le cas où l'effort est négatif, il s'agit d'une compression



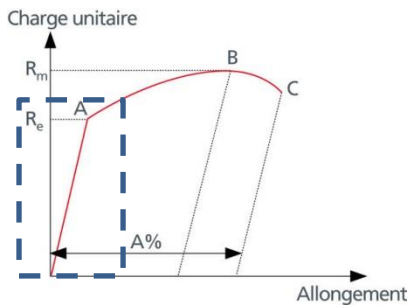
Déformation d'un cristal



Un cristal initialement de longueur l se trouve donc allongé d'une valeur Δl . Son allongement relatif vaut donc :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Si le comportement du réseau est dans sa phase élastique, on observe que la déformation est proportionnelle au rapport de l'effort sur la section (loi de Hooke).



$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Avec $\sigma = E \cdot \varepsilon$

E : module d'élasticité longitudinal ou module d'Young

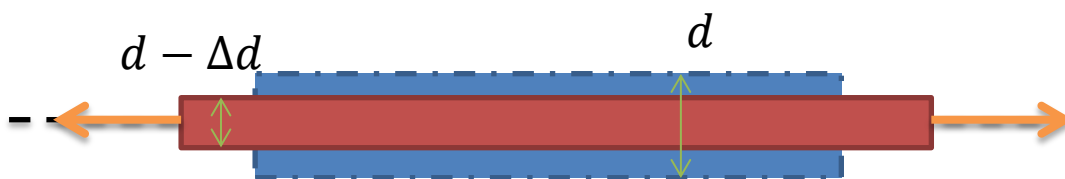
σ : Contrainte longitudinale (N/m^2)

Vous avez dû remarquer sur la vidéo ci-dessus lorsque la poutre s'allonge ou se rétrécit, son allongement s'accompagne d'une modification de la section dans des directions perpendiculaires à celle de l'allongement.

La variation relative des dimensions de la section correspond à la déformation transverse ε'

Avec

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$



Le rapport entre la déformation longitudinale et la déformation transverse est un coefficient appelé le coefficient de Poisson ν

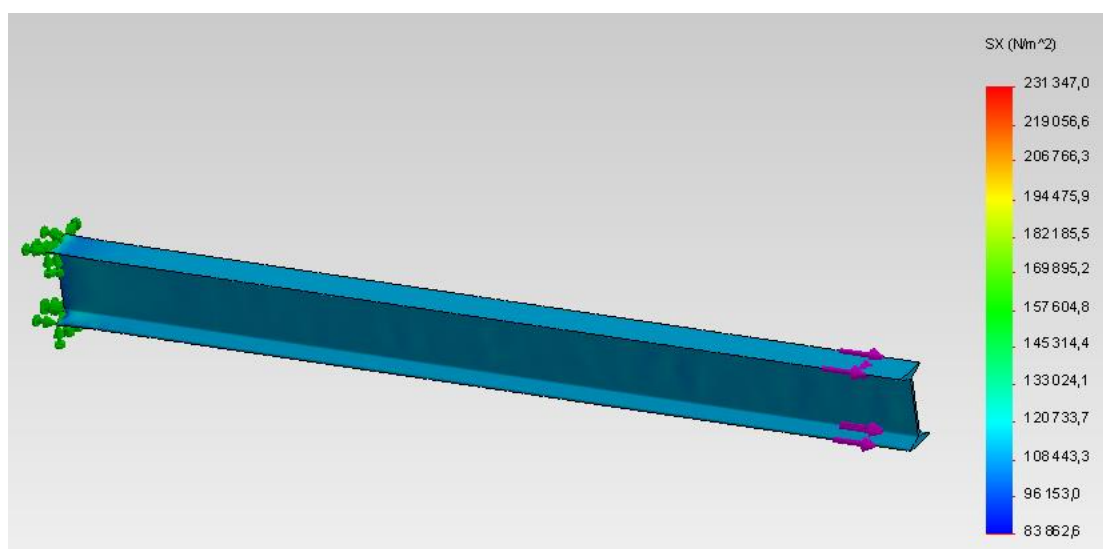
$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

Mis en évidence (analytiquement) par Siméon Denis Poisson, le coefficient de Poisson (auss appelé coefficient principal de Poisson) permet de caractériser la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué.

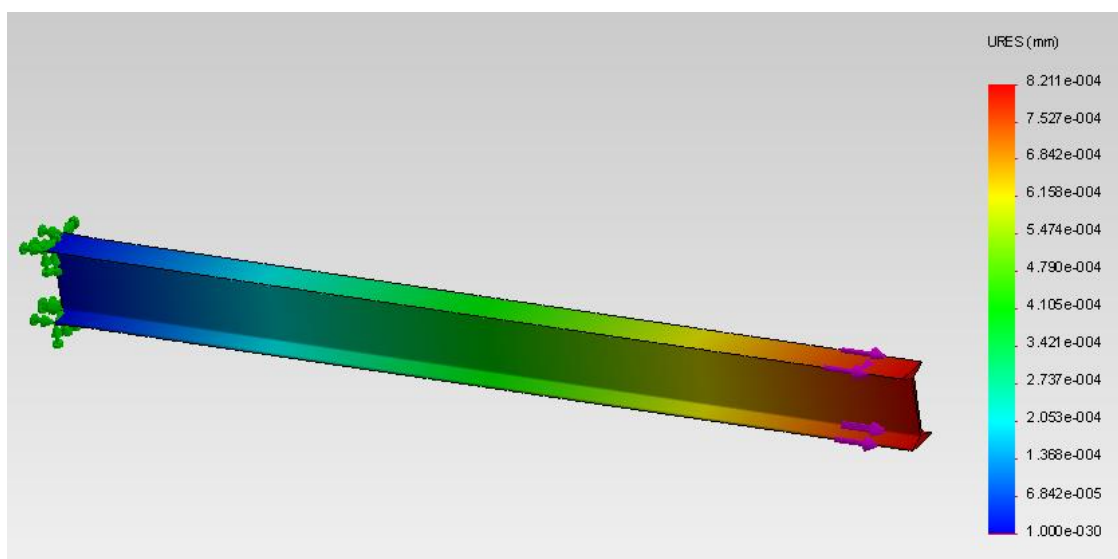
Exemple : IPE 140 (longueur : 1500 mm) sollicité en traction (200N) encastré à son extrémité
Caractéristiques :

Propriété	Valeur	Unités
Module d'élasticité	2.05e+011	N/m ²
Coefficient de Poisson	0.29	S.O.
Module de cisaillement	8e+010	N/m ²
Masse volumique	7870	kg/m ³
Limite de traction	420000000	N/m ²
Limite de compression suivant X		N/m ²
Limite d'élasticité	350000000	N/m ²
Coefficient de dilatation thermique	1.17e-005	/K
Conductivité thermique	51.9	W/(m.K)

- Graphe contrainte normale à sa section droite :
- On remarque que la contrainte est la même partout.



- Graphe allongement normale à sa section droite :



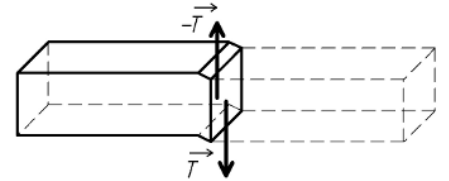
- Cisaillement

Si le réseau atomique étudié précédemment est soumis à des efforts tangentiels T sur ses parois inférieures et supérieures, la sollicitation est appelée cisaillement. Un réseau d'une hauteur h se trouve distordu. La paroi supérieure est alors translatée d'une distance Δl . On a alors γ (*déformation angulaire*) est égale à :

$$\gamma = \frac{\Delta l}{h}$$

La contrainte tangentielle est égale à :

$$\tau = G \times \gamma \quad \text{ou bien} \quad \gamma = \frac{T}{G \times S}$$

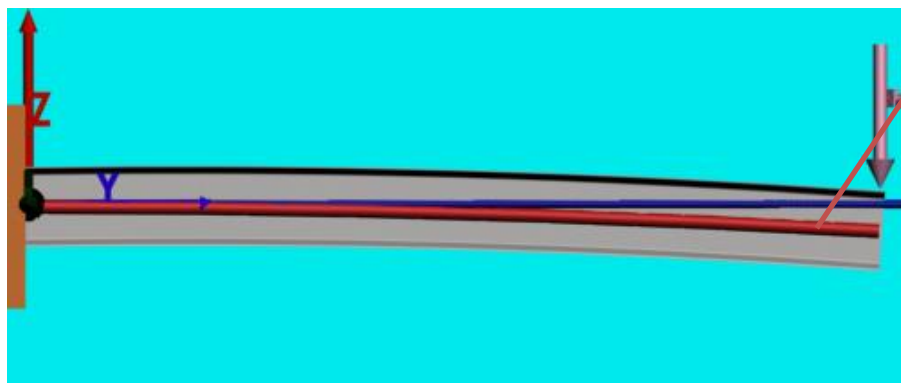


$G \rightarrow$ module d'élasticité avec $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

S : Surface de la section de coupure

- Flexion

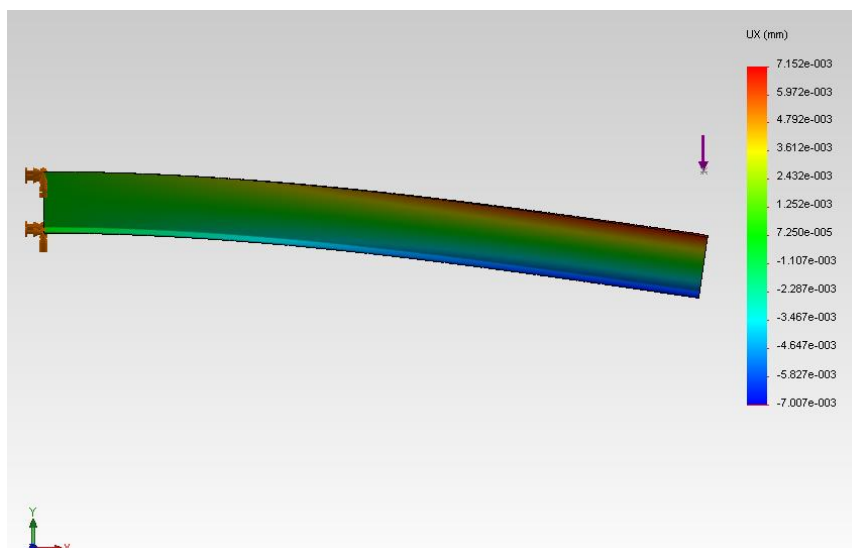
Quand on soumet une poutre encastrée à une force perpendiculaire, celle-ci accuse une flèche (déplacement vertical, d'où le nom de flexion). On constate que les génératrices situées sur la partie supérieure sont sollicitées en traction alors que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en compression. Entre les deux il existe une génératrice qui ne se déforme pas c'est la fibre neutre.

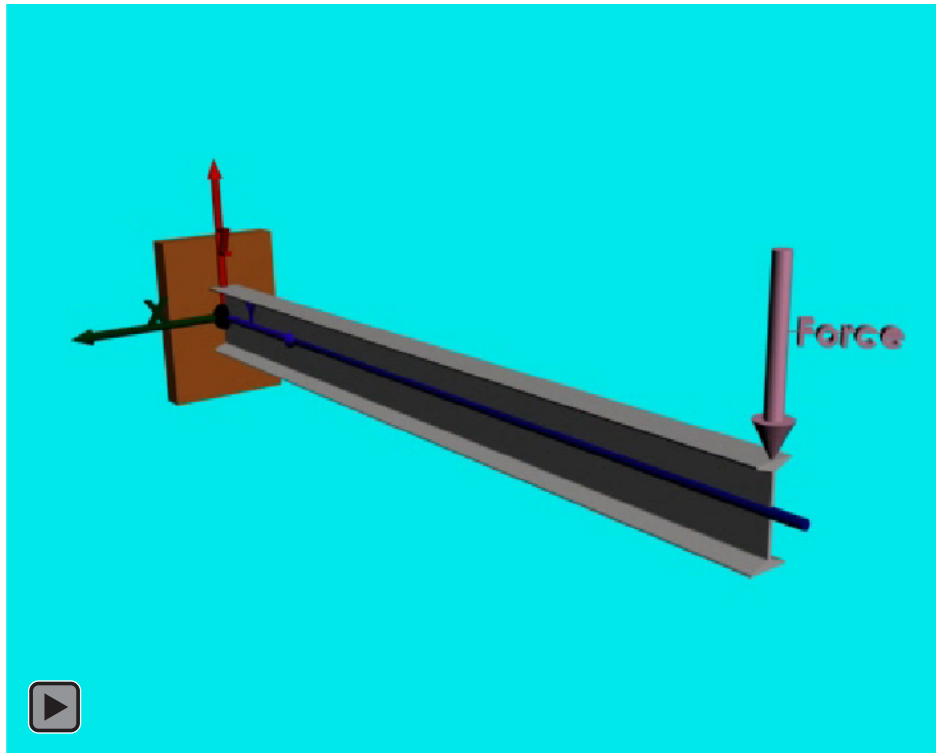


Fibre neutre

- Graphes de déplacement suivant l'axe X

On remarque que la partie supérieure s'est allongée (rouge), alors que la partie inférieure s'est compressée (bleue).





Nous supposons que chaque section droite tourne sans se gauchir autour de l'axe normal à la section. Si on prend un point M sur une des fibres de la poutre, on peut dire d'après la loi de Hooke que la contrainte en ce point est égale à :

$$\sigma = a + by + cz$$

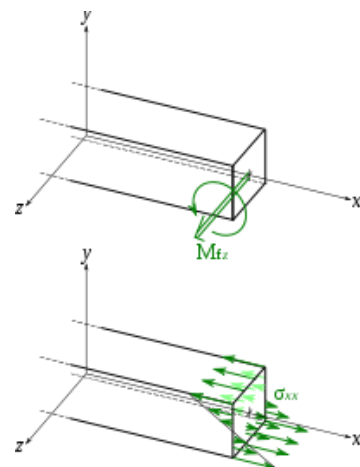
Sachant que l'effort normal est nul ($a=0$) et que la somme de tous les moments des contraintes dans la section donne le moment fléchissant ($c=0$). On peut écrire

$$\sigma = -\frac{M_f}{I_z} y$$

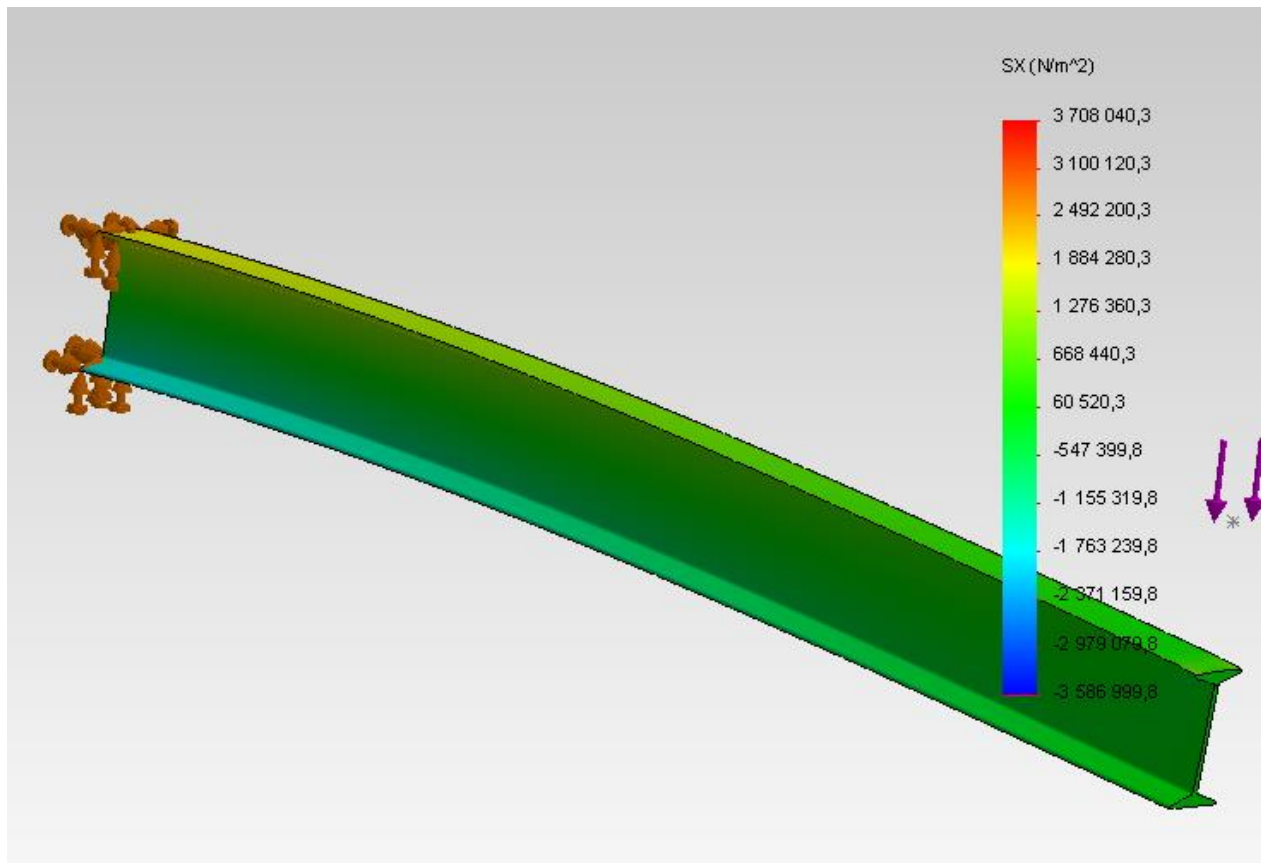
Avec :

M_f = Moment fléchissant

I_z = Moment quadratique suivant l'axe Z



Graphe de contraintes normales à la section



Remarque :

Moment quadratique de sections simples :

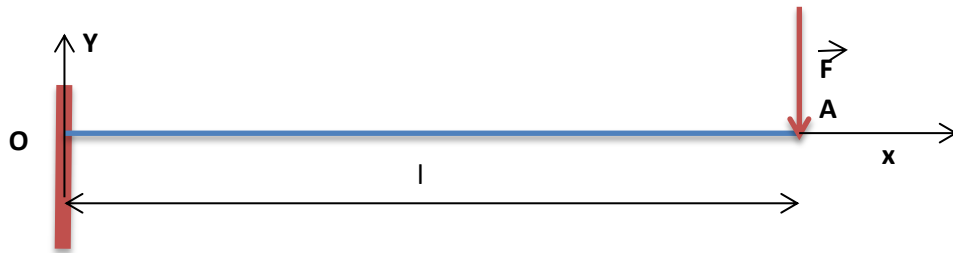
IGz (mm ⁴)	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$
I₀ (mm ⁴)	$\frac{bh^3 + hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$

$$I_0 = I_{Gy} + I_{Gz} \quad \text{moment polaire}$$

Dans le cas de petites déformations, la déformée de la ligne moyenne dans le cas d'une flexion est une fonction $v(x)$ qui est égale à :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_f}{E \cdot I_z}$$

Exercice d'application : (IPE 140)
Schématisation



Torseur des liaisons en O :

- Liaison encastrement

$$\{\mathcal{F}_{interefforts}\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}$$

Etude statique en O :

$$\sum Force = 0$$

$$\sum Moment = 0$$

Projection sur x :
 $X = 0$

Projection sur x :
 $L = 0$

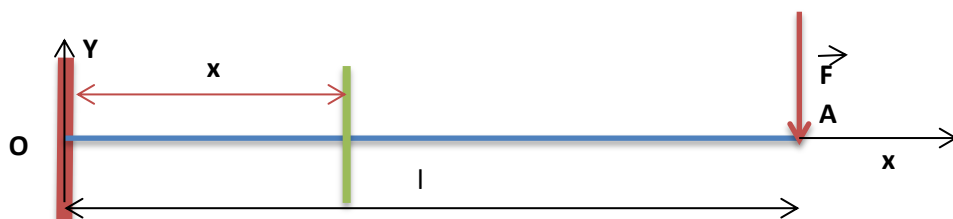
Projection sur y :
 $Y - F = 0$

Projection sur y :
 $M = 0$

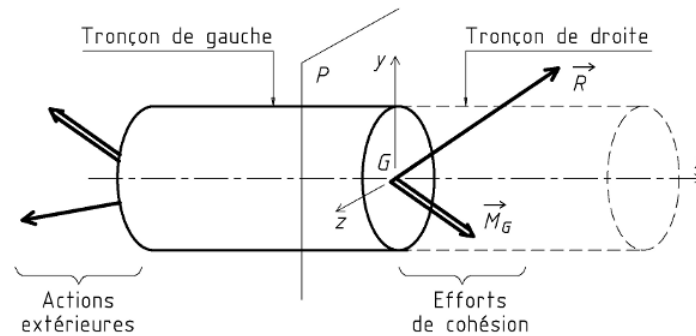
Projection sur z :
 $Z = 0$

Projection sur z :
 $N - l \cdot F = 0$

- Calcul du moment fléchissant



Les contraintes produites par un système de forces dans une section éloignée du point d'application de ces forces ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant du système de forces appliquées à gauche de cette section.



$$\text{Donc } M_f = (-x.Y + N) = -x.F + l.F$$

- Effort tranchant :

$$T = Y = F$$

- Calcul de la déformée :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_f}{E.I_z} = -\frac{(l-x).F}{K}$$

$$\frac{dv}{dx} = -(-x^2 \times \frac{F}{2 \times K} + x \times \frac{F \times l}{K} + C)$$

$$v = -(-x^3 \times \frac{F}{6 \times K} + x^2 \times \frac{F \times l}{2 \times K} + x \times C + B)$$

A $x=0$ $v=0$ et $\frac{dv}{dx} = 0$ donc $B=0$ et $C=0$ ce qui implique

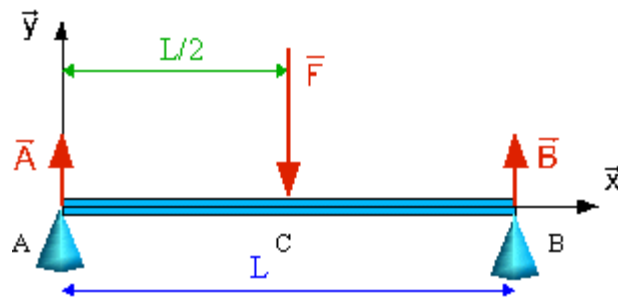
$$v = x^3 \times \frac{F}{6 \times K} - x^2 \times \frac{F \times l}{2 \times K}$$

On a bien une flèche négative donc la valeur maxi à l'extrémité de la poutre est égale à :

$$v = -\frac{1}{3} \times \frac{F}{E.I_z} \times l^3$$

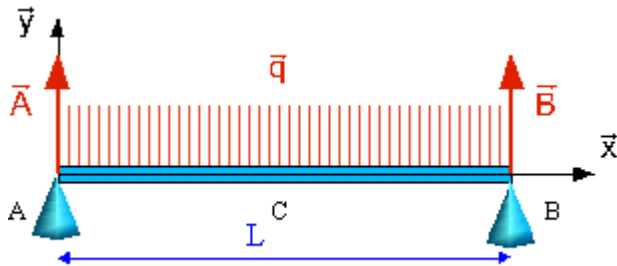
Remarque :

- Poutre reposant sur deux appuis avec charge concentrée au milieu



$$v = -\frac{1}{48} \times \frac{F}{E \cdot I_z} \times l^3$$

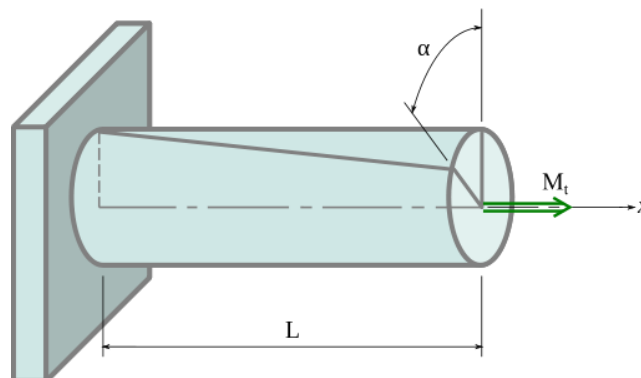
- Poutre reposant sur deux appuis avec charge uniformément répartie

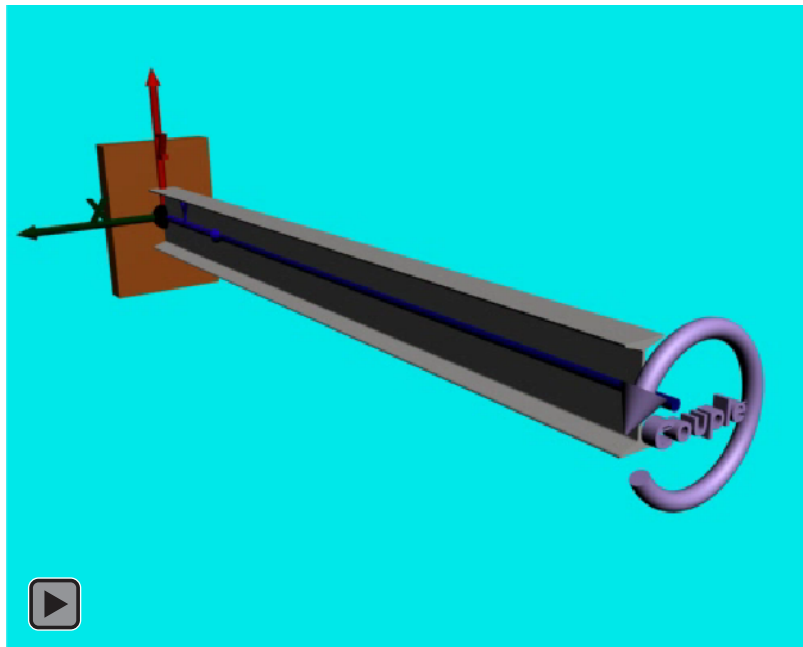


$$v = -\frac{5}{384} \times \frac{q \times l^4}{E \cdot I_z}$$

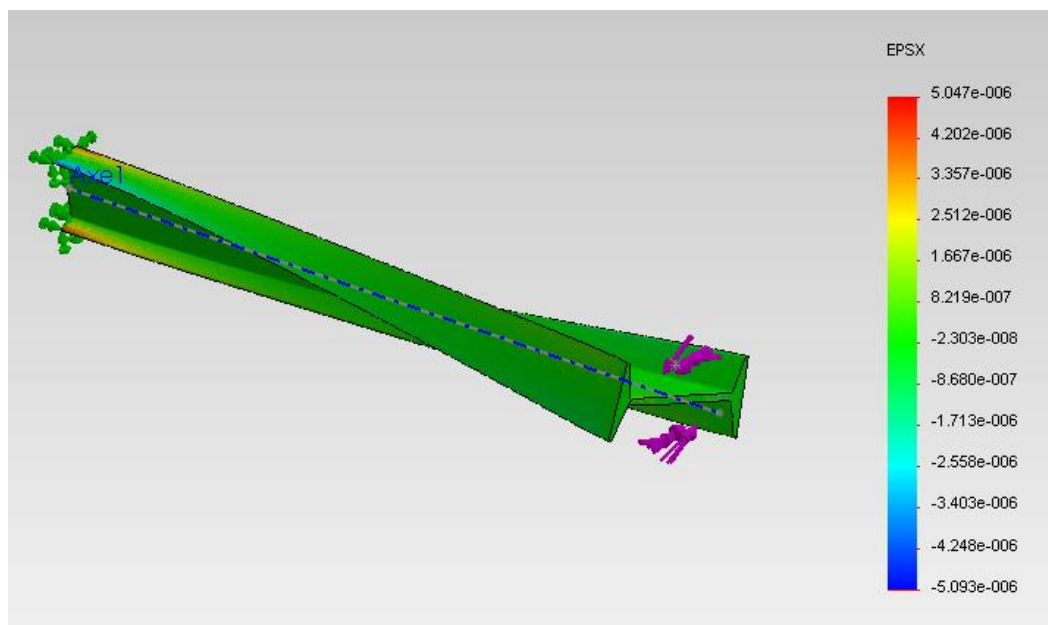
- Torsion

Lorsqu'on soumet une poutre encastree à un couple M_t porté par son axe, on constate que sa longueur ne varie pas au cours de la déformation. On constate aussi que sa section droite reste droite et de même section, et qu'elle tourne en entier dans son plan d'un angle α plus ou moins important en fonction de sa distance par rapport à l'encastrement.





Graphique de déformation suivant l'axe X



- Expression de la contrainte de cisaillement

$$\tau = G \times \theta \times r$$

$r \rightarrow$ distance entre la contrainte et l'axe (x)

$\theta \rightarrow$ Angle unitaire de torsion

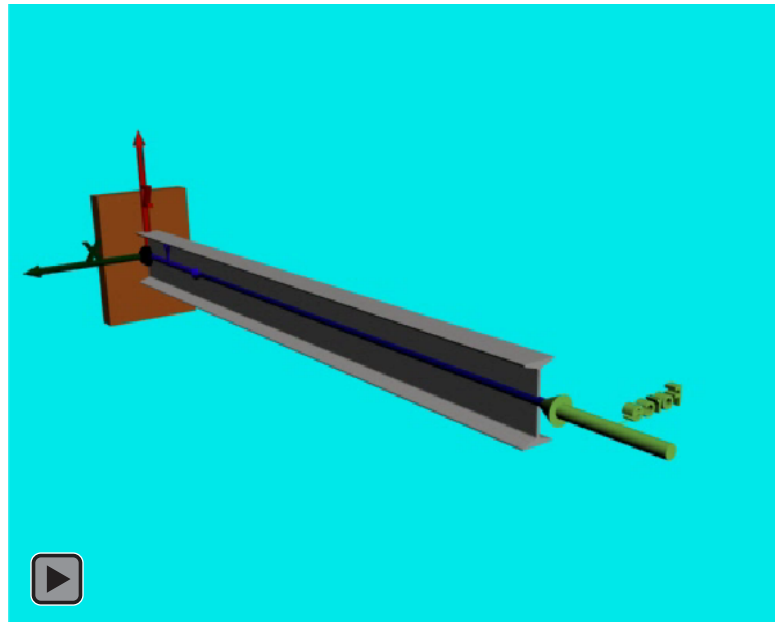
$G \rightarrow$ module d'élasticité avec $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

La somme sur une section droite de toutes les contraintes donne la valeur du moment de torsion donc :

$$M_t = G \times \theta \times I_o$$

- Cas particulier : flambage

C'est un phénomène d'instabilité d'une structure, qui soumise à un effort normal de compression, a tendance à fléchir et se déformer dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression (passage d'un état de compression à un état de flexion).



Pour une poutre d'inertie constante soumise à un effort normal de compression simple, la charge critique de flambage théorique est donnée par la **formule d'Euler**:

$$F = \frac{\pi^2 \times E \times I_o}{l_k^2}$$

- pour une poutre rotulée aux deux bouts, $l_k = L$ (longueur de la poutre),

- pour une poutre encastree - encastree mobile (selon l'axe vertical), $l_k = 0,5 \times L$ (*longueur de la poutre*) ;
- pour une poutre encastree-rotulee, $l_k = 0,7 \times L$ (*longueur de la poutre*) ;
- pour une poutre encastree-libre, $l_k = 2 \times L$ (*longueur de la poutre*) .